Anne-Frank-Gymnasium Werne
Städtisches Gymnasium – EUROPASCHULE

Schulinterner Lehrplan
Gymnasium – Sekundarstufe II

Mathematik

(Fassung vom 1.9.2026)

1 Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit

Schule und Leitbild

Die pädagogische Arbeit am Anne-Frank-Gymnasium Werne (AFG) ist den Werten verpflichtet, die mit unserer Namensgeberin Anne Frank verbunden sind: Toleranz, Demokratie und das Eintreten gegen jede Form von Diskriminierung. Als „Schule ohne Rassismus – Schule mit Courage“ verstehen wir Demokratieerziehung als Aufgabe aller Fächer. Unser Leitbild steht unter dem Motto „Zukunft erleben. Zukunft gestalten. Wir verbinden Welten.“

Im Schulalltag konkretisiert sich das Leitbild in der Vermittlung eines gesicherten Fachwissens (Sachkompetenz), einer methodischen Arbeit, die Kommunikation, Offenheit und Transparenz sowie verantwortungsvolles soziales Handeln fördert (Methodenkompetenz), und einem besonderen Gewicht auf der Digitalkompetenz. Der Mathematikunterricht trägt dazu bei, indem er tragfähiges Fachwissen aufbaut, Begründen und Argumentieren schult und Schülerinnen und Schüler befähigt, Modelle und Daten kritisch zu beurteilen und so zu einem fundierten Urteil zu gelangen.

Das AFG ist seit 2015 Europaschule (rezertifiziert 2021), seit Oktober 2021 zertifizierte MINT-EC-Schule, Digitale Modellschule und Referenzschule im Landesprogramm „Zukunftsschulen NRW“; 2019 wurde es erstmals mit dem Berufswahlsiegel des Landes NRW ausgezeichnet und ist „Schule der Zukunft NRW“. Für den Mathematikunterricht der Oberstufe bedeutet das:

- MINT-EC: Dem Fach Mathematik kommt im Rahmen des MINT-Konzepts der Schule eine zentrale Bedeutung zu; Schülerinnen und Schüler werden zur Teilnahme an Wettbewerben ermutigt und dabei begleitet, sowohl in der Breiten- als auch in der Spitzenförderung.
- Digitalisierung: In der Oberstufe wird durchgängig die TI-Nspire™ CAS-App als modulares Mathematiksystem (MMS) eingesetzt. In der Sekundarstufe I wird sie ab dem Schuljahr 2026/27 bereits ab Klasse 7 genutzt (vorher GeoGebra Scientific Calculator).
- Europaschule: An geeigneten Stellen werden Bezüge zu Europa hergestellt; sie sind in den Unterrichtsvorhaben als „Europabezug“ ausgewiesen.
- Bildung für nachhaltige Entwicklung: Modellierungs- und Anwendungsaufgaben greifen auch Themen wie Klimawandel, Ressourcen und Umwelt auf.
- Kooperationen: Kooperationsverträge mit mittelständischen Unternehmen in Werne, der Hochschule Hamm-Lippstadt und den Fraunhofer-Instituten ermöglichen unter anderem Facharbeiten mit Unterstützung außerschulischer Partner sowie Exkursionen.

Fachgruppe

Der Großteil der Mathematik-Lehrkräfte besitzt die Fakultas für die Sekundarstufen I und II und unterrichtet in diesen Stufen. Eine Lehrkraft unterrichtet ausschließlich in der Sekundarstufe I, zwei weitere in der Erprobungsstufe. Alle Kolleginnen und Kollegen, die in der Sekundarstufe II unterrichten, unterrichten auch in der Sekundarstufe I. Die Fachkonferenz tritt mindestens einmal pro Schuljahr zusammen. Selbst erstellte Unterrichtsreihen und Materialien sowie Materialien der Schulbuchverlage werden zentral in digitaler Form bereitgestellt, laufend ergänzt und weiterentwickelt.

Unterrichtsorganisation in der Sekundarstufe II

- Einführungsphase: Mathematik wird dreistündig unterrichtet. Zusätzlich wird ein zweistündiger Vertiefungskurs Mathematik angeboten, der allen Schülerinnen und Schülern offensteht.
- Qualifikationsphase: Grundkurse werden dreistündig, Leistungskurse fünfstündig unterrichtet. Die Anzahl der Kurse richtet sich nach der Größe des Jahrgangs; in der Regel wird ein Leistungskurs eingerichtet.

- Ist die Lehrkraft eines Kurses abwesend (z.B. wegen Krankheit oder Fortbildung), arbeiten die Schülerinnen und Schüler in einer Studienzeit; die Aufgaben dafür stellt die Lehrkraft des Kurses über digitale Wege wie z.B. Moodle, Untis oder Nextcloud bereit.

Ausstattung

Für den alltäglichen Lehr- und Lernbedarf stehen verschiedene Lernorte (Spaces-Lernlandschaften) und eine Schülerbücherei zur Verfügung. Die Einbindung von Firmen in Werne, der Universität Münster, der TU Dortmund und der Hochschule Hamm-Lippstadt (HSHL), etwa in Form von Betriebsführungen oder Vorlesungen, eröffnet den Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten, Mathematik lebendig zu erfahren.

Übergänge

Durch eine enge Kooperation mit der Sekundarschule werden Schülerinnen und Schüler unterstützt, die nach der Jahrgangsstufe 10 in die Einführungsphase wechseln; nach individueller Beratung wird ihnen insbesondere die Teilnahme am Vertiefungskurs empfohlen.

Förderung und Forderung

- In der Mathe-Akademie erhalten Schülerinnen und Schüler ab der Jahrgangsstufe 10 bis zur Q2 derzeit kostenlose Nachhilfe in Gruppen von höchstens zwölf Personen, samstags, etwa zweimal im Monat.
- Der Team-Wettbewerb „Macht Mathe“ wird in den Leistungskursen der Qualifikationsphase verpflichtend durchgeführt.
- Besonders begabte Schülerinnen und Schüler werden bei der Teilnahme an der Mathematik-Olympiade oder an „Jugend forscht“ individuell unterstützt; nach Beratung ist die Teilnahme an der Schüler-Uni der TU Dortmund oder der Junior-Uni der Universität Münster möglich.
- Geeignete Schülerinnen und Schüler der Oberstufe unterstützen die individuelle Förderung am AFG: Sie geben Nachhilfe in Kleingruppen, unterstützen als Schülercoaches und übernehmen die Hausaufgabenbetreuung.
- Sehr gute Facharbeiten können beim Facharbeits-Slam vorgestellt und bei Wettbewerben eingereicht werden (u.a. Dr. Hans-Riegel-Fachpreis); eine Erweiterung zur „Besonderen Lernleistung“ im Abitur ist möglich.

2 Entscheidungen zum Unterricht

2.1 Abfolge verbindlicher Unterrichtsvorhaben

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan (2023) angeführten Kompetenzerwartungen bis zum Ende der Qualifikationsphase abzudecken. Die Abfolge der Unterrichtsvorhaben und deren Zuordnung zu den Halbjahren sind laut Beschluss der Fachkonferenz für alle Lehrkräfte verbindlich; sie dienen vergleichbaren Standards und der Absicherung bei Kurs- und Lehrkraftwechseln. Die Abfolge der Einführungsphase ist auf die Vorgaben zur Zentralen Klausur am Ende der Einführungsphase abzustimmen.

Der ausgewiesene Zeitbedarf ist eine grobe Orientierungsgröße. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Schülerinteressen, aktuelle Themen und Wiederholungen zu erhalten, sind etwa 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant. Die Ausführungen zur Umsetzung haben empfehlenden Charakter; begründete Abweichungen sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit möglich, sofern insgesamt alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans berücksichtigt werden. Teile von Kompetenzerwartungen, die erst in einem anderen Unterrichtsvorhaben behandelt werden, sind grau gesetzt. Die Nummern der Kompetenzerwartungen entsprechen der Nummerierung im Kernlehrplan.

Die Einführungsphase folgt dem Curriculum der Fachschaft (Stand Oktober 2025, gültig ab dem Abiturjahrgang 2027) in der Abfolge des Lehrwerks „Elemente der Mathematik“. Grundlage für die Qualifikationsphase ist der Beispiel-Lehrplan des Ministeriums (Fassung vom 18.03.2024). Abweichend davon liegt die Stochastik im Leistungskurs vollständig in der Q2 und beginnt mit Bernoulli-Ketten und der Binomialverteilung; Umkehrfunktionen und Logarithmus folgen nach der Stochastik. Im Grundkurs schließt sich in der Q1 an die Ebenen (GK-G2) die Untersuchung geometrischer Körper (GK-G3) an; die Q2 beginnt mit Exponentialfunktionen und zusammengesetzten Funktionen, danach folgt die Stochastik.

Abfolge der Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase	**Zeitbedarf**
I: Funktionen und ihre Darstellung – Eigenschaften und Transformationen von Funktionen (E-A1; „Elemente der Mathematik“ EF, Kapitel 1)	ca. 21 Ustd.
II: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate – Ableitung und Ableitungsregeln (E-A2; „Elemente der Mathematik“ EF, Kapitel 2)	ca. 21 Ustd.
III: Funktionsuntersuchungen – Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A3; „Elemente der Mathematik“ EF, Kapitel 3)	ca. 18 Ustd.
IV: Unterwegs in 3D – Punkte und Vektoren im Raum (E-G1; „Elemente der Mathematik“ EF, Kapitel 4.1–4.4)	ca. 12 Ustd.
V: Vektoren und Geraden – Bewegungen im Raum (E-G2; „Elemente der Mathematik“ EF, Kapitel 4.5–4.6)	ca. 15 Ustd.
Grundkurs Q1	**Zeitbedarf**
GK-1: Optimierungsprobleme (GK-A1)	ca. 13 Ustd.
GK-2: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS) (GK-A2)	ca. 15 Ustd.
GK-3: Von der Änderungsrate zum Bestand (GK-A3)	ca. 8 Ustd.
GK-4: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen (GK-A4)	ca. 12 Ustd.
GK-5: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (GK-G1)	ca. 7 Ustd.
GK-6: Ebenen in Parameter- und Koordinatenform (GK-G2)	ca. 12 Ustd.
GK-7: Untersuchungen an geometrischen Körpern (GK-G3)	ca. 10 Ustd.

Grundkurs Q2	Zeitbedarf
GK-8: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (GK-A5)	ca. 13 Ustd.
GK-9: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (GK-A6)	ca. 9 Ustd.
GK-10: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (GK-A7)	ca. 11 Ustd.
GK-11: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (GK-S1)	ca. 17 Ustd.
GK-12: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung (GK-S2)	ca. 10 Ustd.
GK-13: Änderungen und Auswirkungen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (GK-S3)	ca. 11 Ustd.
Leistungskurs Q1	**Zeitbedarf**
LK-1: Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (inklusive LGS) (LK-A2)	ca. 18 Ustd.
LK-2: Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern (LK-A1)	ca. 22 Ustd.
LK-3: Von der Änderungsrate zum Bestand (LK-A3)	ca. 10 Ustd.
LK-4: Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (LK-A4)	ca. 22 Ustd.
LK-5: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (LK-G1)	ca. 10 Ustd.
LK-6: Parametrisierung von Ebenen (LK-G3)	ca. 6 Ustd.
LK-7: Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen (LK-G2)	ca. 13 Ustd.
LK-8: Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (LK-G4)	ca. 6 Ustd.
LK-9: Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Einschluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder (LK-G5)	ca. 10 Ustd.
LK-10: Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen (LK-G6)	ca. 6 Ustd.
LK-11: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (LK-A7)	ca. 14 Ustd.
LK-12: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (LK-A5)	ca. 15 Ustd.
Leistungskurs Q2	**Zeitbedarf**
LK-13: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (LK-A8)	ca. 20 Ustd.
LK-14: Modellierung wiederholter Trefferexperimente mit der Binomialverteilung – Berechnung, Umkehrung und Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten in Sachkontexten (LK-S1)	ca. 14 Ustd.
LK-15: Abhängig oder nicht? – Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit (LK-S2)	ca. 9 Ustd.
LK-16: Was ist zu erwarten? – Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen und Binomialverteilungen (LK-S3)	ca. 8 Ustd.
LK-17: Prognose und Vertrauen – Schließen mit Prognose- und Konfidenzintervallen (LK-S4)	ca. 13 Ustd.
LK-18: Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen (LK-S5)	ca. 9 Ustd.
LK-19: Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen (LK-A6)	ca. 8 Ustd.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW

Die Ziele des Medienkompetenzrahmens NRW (MKR) sind in die Unterrichtsvorhaben integriert. Grundlage ist die Synopse „Integration der Ziele des Medienkompetenzrahmens NRW in den Kernlehrplan Mathematik für die gymnasiale Oberstufe“ (QUA-LiS, 2023), die den MKR-Kompetenzen die Kompetenzen des Kernlehrplans zuordnet. Den Unterrichtsvorhaben sind jeweils die MKR-Kompetenzen zugewiesen, zu denen sie über ihre Kompetenzerwartungen einen erkennbaren Beitrag leisten; die konkrete Umsetzung ist am Ende jedes Unterrichtsvorhabens beschrieben. Als MMS wird die TI-Nspire™ CAS-App eingesetzt; ist vom MMS die Rede, ist diese App gemeint. Alle in der Synopse genannten MKR-Kompetenzen werden sowohl im Grundkurs als auch im Leistungskurs der Qualifikationsphase mindestens einmal gezielt aufgegriffen.

Unterrichtsvorhaben	MKR-Kompetenzen
EF I: Funktionen und ihre Darstellung – Eigenschaften und Transformationen von Funktionen	1.1, 1.2, 1.3
EF II: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate – Ableitung und Ableitungsregeln	1.2
EF III: Funktionsuntersuchungen – Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen	1.2, 5.4
EF IV: Unterwegs in 3D – Punkte und Vektoren im Raum	1.2
EF V: Vektoren und Geraden – Bewegungen im Raum	4.1, 4.2
GK-1: Optimierungsprobleme	1.2, 2.2
GK-2: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS)	1.1, 1.3, 6.2
GK-3: Von der Änderungsrate zum Bestand	1.2, 4.1, 4.3
GK-4: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen	1.2
GK-5: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen	1.2, 2.2
GK-6: Ebenen in Parameter- und Koordinatenform	1.2
GK-7: Untersuchungen an geometrischen Körpern	1.2, 4.1, 4.3
GK-8: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion	1.2, 2.1, 2.3
GK-9: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln	1.2
GK-10: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen	4.1, 4.2, 5.4
GK-11: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	1.2, 2.2
GK-12: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung	1.2, 2.1
GK-13: Änderungen und Auswirkungen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen	1.2, 5.4
LK-1: Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (inklusive LGS)	1.1, 1.3, 6.2
LK-2: Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern	1.2
LK-3: Von der Änderungsrate zum Bestand	1.2, 4.1, 4.2, 4.3
LK-4: Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung	1.2
LK-5: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen	1.2, 2.2
LK-6: Parametrisierung von Ebenen	1.2
LK-7: Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen	1.2, 2.2
LK-8: Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten	–
LK-9: Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Einschluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder	1.2, 4.1, 4.3
LK-10: Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen	5.4
LK-11: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln	1.2
LK-12: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion	1.2, 2.1, 2.3
LK-13: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen	4.1, 4.2, 5.4
LK-14: Modellierung wiederholter Trefferexperimente mit der Binomialverteilung – Berechnung, Umkehrung und Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten in Sachkontexten	1.2
LK-15: Abhängig oder nicht? – Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit	2.2
LK-16: Was ist zu erwarten? – Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen und Binomialverteilungen	1.2
LK-17: Prognose und Vertrauen – Schließen mit Prognose- und Konfidenzintervallen	1.2, 2.3, 5.4
LK-18: Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen	2.1, 5.4
LK-19: Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen	1.2, 5.4

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase

Unterrichtsvorhaben I: *Funktionen und ihre Darstellung – Eigenschaften und Transformationen von Funktionen (E-A1)*

(**Zeitbedarf**: ca. 21 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen,

(2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel,

(3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),

(4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter,

(18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung (Lehrwerk „Elemente der Mathematik“ EF, nach dem Curriculum der Fachschaft):

1.1 Funktionen und ihre Darstellung (S. 10–13): Begriffe Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich, Graph, Wertetabelle; Intervall- und Mengenschreibweisen werden erklärt; abschnittsweise definierte Funktionen werden eingeführt; auf Funktionen mit eingeschränkten Definitionsbereichen wird hingewiesen; einfache Modellierungen mit linearen und quadratischen Funktionen.

1.2 Potenzfunktionen (S. 14–15): Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten werden zusammengetragen; Punkte auf dem Graphen werden bestimmt; Graphen werden erkannt und den Funktionstermen zugeordnet.

1.3 Funktionsgraphen verschieben und strecken (S. 16–19): Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen von g für $g(x) = f(x) + d, g(x) = f(x - c), g(x) = k \cdot f(x)$ und $g(x) = f(k \cdot x)$; Funktionsterme zu vorgegebenen Transformationen aufstellen.

1.4 Ganzrationale Funktionen (S. 20–23): Begriffe ganzrationale Funktion, Polynom, Grad, Koeffizienten; Terme ganzrationaler Funktionen erkennen; Globalverlauf für $x \to \pm\infty$ in Abhängigkeit vom Summanden mit dem größten Exponenten bestimmen.

1.5 Symmetrien von Funktionsgraphen (S. 24–27): Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung rechnerisch am Funktionsterm nachweisen; einfache Erkennung bei ganzrationalen Funktionen an den Exponenten; am Ende auch Aufgaben zu anderen Symmetrien.

1.6 Nullstellen (S. 28–31): Nullstellen ganzrationaler Funktionen mithilfe von Faktoren oder durch Ausklammern ohne Hilfsmittel und mithilfe eines Rechners bestimmen; auf den Verlauf der Graphen an mehrfachen Nullstellen wird eingegangen.

1.7 Wiederholungen S. 34–37.

Hinweis:

- Ein besonderes Augenmerk liegt in diesem Unterrichtsvorhaben auf der Einführung bzw. Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen der TI-Nspire™ CAS-App.
- Die Kompetenzerwartungen (3) und (4) beziehen die Sinusfunktion ein, die aus Klasse 10 bekannt ist; Transformationen werden daher auch an der Sinusfunktion betrachtet.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.1 (Medienausstattung (Hardware)): Die TI-Nspire™ CAS-App wird auf den persönlichen iPads eingeführt bzw. wiederholt; die Lernenden lernen, wann der Einsatz sinnvoll ist (Ope-11).
- MKR 1.3 (Datenorganisation): MMS-Dokumente und Unterrichtsmaterialien werden in einer verabredeten Struktur gespeichert und über die Schulcloud abgerufen (Ope-11).
- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Der Einfluss von Parametern auf Graphen (auch der Sinusfunktion) wird mit Schiebereglern im MMS erkundet (Kom-7, Ope-12).

Unterrichtsvorhaben II: *Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate – Ableitung und Ableitungsregeln (E-A2)*

(**Zeitbedarf**: ca. 21 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
(6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen,
(7) erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate, nutzen die Schreibweise $\lim_{x\to} f(x)$,
(8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
(9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
(10) beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),
(11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen,
(13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
(14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung (Lehrwerk „Elemente der Mathematik“ EF, nach dem Curriculum der Fachschaft):

2.1 Mittlere Änderungsrate (S. 40–45): Begriffe Differenzenquotient, mittlere Änderungsrate, Sekante; mittlere Änderungsraten aus Tabellen und Graphen bestimmen und mit dem Funktionsterm berechnen; geometrische Deutung als Sekantensteigung; Gleichung einer Sekante bestimmen; mittlere Änderungsraten in Sachkontexten deuten.

2.2 Lokale Änderungsrate (S. 46–51): Momentangeschwindigkeit näherungsweise aus mittleren Geschwindigkeiten bestimmen; Begriffe Grenzwert des Differenzenquotienten, lokale Änderungsrate, Ableitung an einer Stelle, Tangente, Steigung eines Graphen in einem Punkt; Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen; lokale Änderungsraten werden hier nur näherungsweise mithilfe des Differenzenquotienten oder durch Einzeichnen einer Tangente nach Augenmaß bestimmt.

2.3 Ableitung an einer Stelle berechnen (S. 52–55): exakte Bestimmung der Ableitung an einer Stelle für die Quadratfunktion mit Beweis; Einführung der h-Schreibweise; Ableitungen weiterer quadratischer Funktionen an einer Stelle. Differenzierbarkeit (S. 56–57) als Vorschlag für ein Referat.

2.4 Graph der Ableitungsfunktion (S. 58–63): Begriffe Ableitungsfunktion, grafisches Differenzieren, Hochpunkt, Tiefpunkt, Wendepunkt, Sattelpunkt; aus dem Graphen einer Funktion f wird der Graph der Ableitungsfunktion f’ entwickelt; Wendepunkte erkennt man an der extremalen Steigung der Tangente. Hier werden die Grundlagen für die Funktionsuntersuchungen gelegt; die Entwicklung des Graphen von f aus dem Graphen von f’ folgt in Abschnitt 3.1.

2.5 Potenzregel (S. 64–65): Die Kubikfunktion wird abgeleitet; die Vorgehensweise wird auf Potenzfunktionen übertragen.

2.6 Faktor- und Summenregel (S. 66–69): Herleitung der Regeln; besonders der Beweis der Faktorregel bietet sich an; Anwendung in innermathematischen Aufgaben und Sachaufgaben.

2.7 Tangenten und Normalen (S. 70–75): Der Begriff der Normalen wird zusammen mit der Orthogonalitätsbedingung von Geraden eingeführt; Aufgaben zu Tangenten und Normalen; Steigungswinkel; Orthogonalität von Funktionsgraphen.

2.8 Wiederholungen S. 78–81.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Sekantensteigungen für immer kleinere Intervalle und der Graph der Ableitungsfunktion werden mit dem MMS untersucht (Ope-11, Ope-12).

Unterrichtsvorhaben III: *Funktionsuntersuchungen – Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A3)*

(**Zeitbedarf**: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Differentialrechnung: Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen,
(12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung,
(15) unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
(16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
(17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,
(19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abh. von Parametern,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),

Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.

Umsetzung (Lehrwerk „Elemente der Mathematik“ EF, nach dem Curriculum der Fachschaft):

3.1 Monotonie (S. 84–87): strenge Monotonie, Monotoniesatz; Monotonieintervalle werden rechnerisch mithilfe der 1. Ableitung bestimmt, der Vorzeichenwechsel wird überprüft und übersichtlich dargestellt; Eigenschaften von f am Graphen von f’ erkennen; aus dem Graphen von f’ einen möglichen Graphen von f entwickeln.

3.2 Extrempunkte (S. 88–93): Unterscheidung von Extrempunkten und Extremstellen; notwendiges Kriterium und Vorzeichenwechselkriterium; Begriffe lokales und globales Maximum bzw. Minimum, lokales und globales Extremum, Randextremum; Extrempunkte auch mithilfe eines Rechners bestimmen.

3.3 Zweite Ableitung (S. 94–97): zweite und dritte Ableitung werden eingeführt; das f”-Kriterium für Extremstellen wird begründet; Zusammenhänge zwischen den Graphen von f, f’ und f” werden aufgezeigt.

3.4 Wendepunkte (S. 98–103): Begriffe Linkskurve, Rechtskurve; Krümmungsverhalten von f an der Monotonie von f’ erkennen; notwendiges und hinreichendes Kriterium für Wendestellen; Wendepunkte rechnerisch mithilfe von f” bestimmen, Vorzeichenwechsel überprüfen und übersichtlich darstellen; Wendepunkte mithilfe eines Rechners bestimmen; f”’-Kriterium.

3.5 Funktionsuntersuchungen (S. 106–109, inklusive Parameter in Funktionen und deren Bedeutung): Die Kriterien der vorangegangenen Abschnitte werden übersichtlich dargestellt und in innermathematischen Aufgaben und Sachaufgaben angewendet.

3.6 Wiederholungen S. 110–113.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Funktionsuntersuchungen werden mit dem MMS kontrolliert; Graphen von f, f’ und f” werden gemeinsam dargestellt (Ope-12).
- MKR 5.4 (Selbstregulierte Mediennutzung): Die Lernenden entscheiden situationsangemessen, welche Schritte sie hilfsmittelfrei und welche mit dem MMS bearbeiten (Ope-13).

Unterrichtsvorhaben IV: *Unterwegs in 3D – Punkte und Vektoren im Raum (E-G1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren
- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
(2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
(3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
(4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
(5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,
(6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang.

Umsetzung (Lehrwerk „Elemente der Mathematik“ EF, nach dem Curriculum der Fachschaft):

4.1 Punkte im Raum (S. 116–119): Einführung eines räumlichen Koordinatensystems; Schrägbild des Koordinatensystems auf Karogitter zeichnen; Punkte mithilfe ihres Koordinatenzuges zeichnen; Koordinaten an Schrägbildern ablesen; Schrägbild eines Körpers im Koordinatensystem zeichnen; Hinweis auf Probleme beim Ablesen von Koordinaten; Projektion in eine Koordinatenebene; Spiegelungen.

4.2 Verschiebungen im Raum – Vektoren (S. 120–123): Vektor als Verschiebung, die durch ein Zahlentripel beschrieben werden kann; Begriffe Verbindungsvektor, Ortsvektor, Nullvektor, Gegenvektor; Länge eines Vektors; Abstand zweier Punkte im Raum.

4.3 Vektoren addieren und subtrahieren (S. 124–127): Summen- und Differenzvektor berechnen und am Vektorparallelogramm deuten; Rechengesetze; Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken mithilfe von Vektoren untersuchen.

4.4 Vektoren vervielfachen (S. 128–131): Vielfache geometrisch als parallele Pfeile deuten – Kollinearität; Vektoren auf Parallelität prüfen (lineares Gleichungssystem mit einer Variablen und drei Gleichungen); Vektoren in Figuren durch Linearkombinationen beschreiben; Mittelpunkt einer Strecke. Bewegung auf dem Wasser (S. 132–133): Vektoren als Geschwindigkeiten deuten.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Punkte, Vektoren und Körper werden mit der 3D-Darstellung des MMS bzw. GeoGebra veranschaulicht (Ope-11, Ope-12).

Unterrichtsvorhaben V: *Vektoren und Geraden – Bewegungen im Raum (E-G2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Geraden und Strecken: Parameterform
- Lagebeziehung von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend
- Schnittpunkte: Geraden

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
(8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
(9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
(10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
(11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
(12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung (Lehrwerk „Elemente der Mathematik“ EF, nach dem Curriculum der Fachschaft):

4.5 Geraden im Raum (S. 134–139): Begriffe Parameterdarstellung, Richtungsvektor, Stützvektor, Ursprungsgerade; Gerade durch zwei Punkte bestimmen; Punktprobe (lineares Gleichungssystem mit einer Variablen und drei Gleichungen); Strecken beschreiben; Lage einer Geraden im Raum – Spurpunkte bestimmen.

4.6 Lagebeziehungen zwischen Geraden (S. 140–143): mögliche Lagen von Geraden im Raum verdeutlichen; systematische Untersuchung von Lagebeziehungen; Schnittpunktbestimmung (lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen und drei Gleichungen); Lagebeziehungen mithilfe eines Rechners untersuchen; Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme geometrisch deuten. Wiederholungen S. 144–147.

Hinweis:

- Abschnitt 4.6 kann gegebenenfalls in die Q1 verlegt werden; er wird dann zu Beginn der Analytischen Geometrie der Q1 behandelt (vgl. GK-5 bzw. LK-5).

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 4.1 (Medienproduktion und Präsentation): Die Lernenden stellen Lösungen zu Bewegungsaufgaben (z.B. Flugbahnen) als digitales Lernprodukt dar und präsentieren sie (Kom-10).
- MKR 4.2 (Gestaltungsmittel): Die Lernprodukte werden hinsichtlich Darstellung und Verständlichkeit beurteilt (Kom-10).

Summe Einführungsphase: 120 Unterrichtsstunden (3 Wochenstunden)

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 87 Unterrichtsstunden

Qualifikationsphase

Grundkurs Q1

Unterrichtsvorhaben GK-1: *Optimierungsprobleme (GK-A1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 13 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben")

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(4) erläutern den Begriff der Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs,

(5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege.

Umsetzung:

Gestartet wird mit Optimierungsproblemen mit ganzrationalen Funktionen. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt. An mindestens einem Problem im Sachzusammenhang entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$. Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden.

Exkurs: Beim Lösen von Gleichungen der Form $x^2 = a$ wird die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion der Quadratfunktion (eingeschränkt auf $x \geq 0$) betrachtet; der Zusammenhang der Graphen wird als Spiegelung an der Winkelhalbierenden gedeutet.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Zielfunktionen von Optimierungsproblemen werden mit dem MMS graphisch und numerisch untersucht; Randwerte und Definitionsbereiche werden am Graphen kontrolliert (Ope-12).
- MKR 2.2 (Informationsauswertung): Informationen aus Sachtexten und Skizzen werden für die Modellierung strukturiert und formalisiert (Kom-1).

Unterrichtsvorhaben GK-2: *Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS) (GK-A2)*

(**Zeitbedarf**: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)
Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung.

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G): Die Schülerinnen und Schüler

(7) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,

(8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein.

Umsetzung:

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrien, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen finden. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden.

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen.

Anknüpfend an die Einführungsphase werden in innermathematischen Situationen und in unterschiedlichen Kontexten (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) ganzrationale Funktionen mit Parametern aufgestellt und mithilfe eines MMS untersucht. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Vertiefung:

- Auch die Transformation der Sinus- und Kosinusfunktion kann wiederholend zur Modellierung eingesetzt werden.

Vernetzung:

- In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme schwerpunktmäßig behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie ebenfalls benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt mehr bilden. Verschiedene Arten von Lösungsmengen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten wurden bereits in der EF bei den Lagebeziehungen von Geraden aufgegriffen.

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.1 (Medienausstattung (Hardware)): Die Lernenden richten zu Beginn der Qualifikationsphase ihre Arbeitsumgebung ein (iPad mit der TI-Nspire™ CAS-App, digitale Heftführung) und entscheiden begründet über den Einsatz des MMS (Ope-11, Ope-13).
- MKR 1.3 (Datenorganisation): Unterrichtsdokumente und MMS-Dateien werden in einer verabredeten Ordnerstruktur gespeichert und über die Schulcloud abgerufen (Ope-11).
- MKR 6.2 (Algorithmen erkennen): Das Gauß-Verfahren wird als Algorithmus erläutert, ohne MMS auf kleine Gleichungssysteme angewendet und mit der Lösung durch das MMS verglichen (G-(7), G-(8)).

Unterrichtsvorhaben GK-3: *Von der Änderungsrate zum Bestand (GK-A3)*
(**Zeitbedarf**: ca. 8 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,
(12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
(13) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,
(14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:
Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben II der Einführungsphase (E-A2). Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge).

Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und vergleichen eigenständig unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsumme, Ober- oder Untersumme) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen, die zur Definition des Integrals führen.

Hinweis:
- Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden.

Materialhinweis:
- Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (2008) in der Materialdatenbank entnommen werden: https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=448&idcat=378&lang=9&client=12&matId=2033

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):
- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Produktsummen werden in einer Tabellenkalkulation bzw. der Tabellenansicht des MMS berechnet und für feinere Zerlegungen verglichen (Kom-7, Ope-11).
- MKR 4.1 (Medienproduktion und Präsentation): Die Lernenden erstellen ein digitales Lernprodukt (z.B. Erklärvideo oder Präsentation) zur Rekonstruktion eines Bestandes aus Änderungsraten und präsentieren es (Kom-10).
- MKR 4.3 (Quellendokumentation): Verwendete fremde Materialien werden mit Quellenangabe dokumentiert (Kom-10).

Unterrichtsvorhaben GK-4: *Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen (GK-A4)*

(**Zeitbedarf**: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
(15) erläutern geometrisch-anschaulich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wenden ihn an,
(16) nutzen vorgegebene Stammfunktionen und bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen,
(17) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen,
(18) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion,
(19) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
– Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:
Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird durch geometrisch-anschauliche Überlegungen begründet und damit der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgestellt. Die Bedeutung des Hauptsatzes und seine Anwendung werden in verschiedenen Kontexten vertieft.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen von Stammfunktionen werden für ganzrationale Funktionen von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden auf weitere innermathematische bzw. anwendungsorientierte Situationen übertragen, die auch Flächen zwischen Funktionsgraphen umfassen. Bei geeigneten Problemstellungen werden die Intervalladditivität und Linearität des Integrals thematisiert. Geeignete Problemstellungen werden in diesem Unterrichtsvorhaben auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Integralfunktionen und Flächen zwischen Graphen werden mit dem MMS visualisiert und berechnet (Ope-11, Ope-12).

Unterrichtsvorhaben GK-5: *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (GK-G1)*

(**Zeitbedarf**: ca. 7 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperation: Skalarprodukt

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,

(9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,

Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist jedoch die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dieses wird am Beispiel der Kräftezerlegung (z.B. Zerlegung in vertikale und horizontale Komponenten beim Schlittenziehen) veranschaulicht.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht. Werden die Lagebeziehungen zwischen Geraden gemäß dem Curriculum der EF in die Q1 verlegt, werden sie zu Beginn dieses Unterrichtsvorhabens zusammen mit einer Wiederholung von Vektoren und Geraden behandelt.

Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produkts von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. Division durch einen Vektor) und vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen gestellt.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Vektoren und Winkel werden in der 3D-Darstellung des MMS bzw. mit GeoGebra veranschaulicht (Ope-11).
- MKR 2.2 (Informationsauswertung): Informationen aus Materialien zu Anwendungssituationen werden strukturiert und in Vektorschreibweise übertragen (Kom-1).

Unterrichtsvorhaben GK-6: *Ebenen in Parameter- und Koordinatenform (GK-G2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
(3) verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
(4) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
(8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
  – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
  – Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:
Ausgehend von der Parameterform von Geraden aus der Einführungsphase wird die Parameterform einer Ebene eingeführt. Als Einstieg dient eine Solaranlage auf einem Hausdach: Die Eckpunkte der Kollektoren werden von einer Ecke A aus erreicht, indem Vielfache zweier Vektoren entlang der Kollektorkanten addiert werden. Daraus ergibt sich die Parameterform einer Ebene mit einem Stützvektor und zwei nicht parallelen Richtungsvektoren. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen.

Anschließend werden Punkte einer Ebene durch Einsetzen von Parameterwerten bestimmt und umgekehrt zu gegebenen Punkten die Parameterwerte ermittelt (Punktprobe über ein lineares Gleichungssystem). Weitere Kontexte wie eine Balkonmarkise festigen diese Vorstellung. Zu drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, wird eine Parameterform aufgestellt, indem ein Ortsvektor als Stützvektor und zwei Verbindungsvektoren als Richtungsvektoren gewählt werden.

Die Koordinatenform wird an einer Ebene eingeführt, die durch einen Punkt P einer Geraden g verläuft und orthogonal zu g ist. Mithilfe des in GK-5 eingeführten Skalarprodukts wird geprüft, ob weitere Punkte in dieser Ebene liegen: Ein Punkt X liegt genau dann in der Ebene, wenn der Vektor von P nach X orthogonal zum Richtungsvektor von g ist. Das Ausrechnen dieser Bedingung führt auf eine Gleichung der Form $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$. Der Vektor mit den Koordinaten n_1, n_2, n_3 wird als Normalenvektor gedeutet, der senkrecht auf der Ebene steht; d ergibt sich als Skalarprodukt aus Normalenvektor und Ortsvektor eines Punktes der Ebene. Die Punktprobe gelingt in der Koordinatenform durch bloßes Einsetzen der Koordinaten. Ein explizites Arbeiten mit der Normalenform erfolgt nur im Rahmen einer Differenzierung.

Auch die Schnittpunktberechnung (Durchstoßpunkt) zwischen Geraden und Ebenen ist mit der Koordinatenform besonders einfach, wenn ein allgemeiner Punkt der Geraden in die Koordinatenform eingesetzt wird. Die Spurpunkte mit den Koordinatenachsen ordnen sich dabei als Spezialfall ein; mit ihnen lässt sich die Lage der Ebene im Koordinatensystem zeichnerisch darstellen. Ein MMS unterstützt die räumliche Visualisierung.

Der Übergang von der Parameterform zur Koordinatenform erfolgt über die Bestimmung eines Normalenvektors, der zu beiden Richtungsvektoren orthogonal ist (unterbestimmtes 2x3-Gleichungssystem). Umgekehrt kann aus einer Koordinatenform eine Parameterform über drei Punkte der Ebene, z.B. die Spurpunkte, gewonnen werden.

Vernetzung:

- Ein systematisches Verfahren, lineare Gleichungssysteme auch hilfsmittelfrei in einfachen Fällen zu lösen, wurde bereits im Unterrichtsvorhaben GK-2 eingeführt. Es wird hier bei der Punktprobe in der Parameterform (3x2-Gleichungssystem) und bei der Bestimmung eines Normalenvektors geübt und wiederholt.

Vertiefung:
- Ein Normalenvektor kann mit einem MMS auch mithilfe des Vektorprodukts berechnet werden.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):
- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Ebenen werden mit dem MMS räumlich dargestellt; Gleichungssysteme zu Punktproben und Schnittmengen werden mit dem MMS gelöst und interpretiert (Ope-12).

Unterrichtsvorhaben GK-7: *Untersuchungen an geometrischen Körpern (GK-G3)*
(**Zeitbedarf**: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfelder: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
(3) verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
(5) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
(6) nutzen Symmetriebetrachtungen in geometrischen Objekten zur Lösung von Problemstellungen und spiegeln Punkte an Ebenen in einfachen Fällen,
(9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
  – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
  – Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte.

Umsetzung:
Geometrische Körper wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen, können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere die Grundebenen, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) werfen die Frage auf, wie sich Spiegelungen an Ebenen durchführen lassen. In einfachen Fällen, in denen der Normalenvektor in Richtung einer Koordinatenachse weist, werden die Koordinaten eines an der Ebene gespiegelten Punktes ermittelt. Der Nachweis der Symmetrie zu einer gegebenen Ebene wird durch einen Vergleich des Normalenvektors mit dem Verbindungsvektor zwischen Punkt und Spiegelpunkt geführt, wobei zusätzlich eine Punktprobe nötig ist, um zu zeigen, dass der Mittelpunkt in der Ebene liegt.

Winkel lassen sich zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmen. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.

Vernetzung:

- Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder auf.

Vertiefung:

- Die Bestimmung von Winkeln zwischen Geraden und Ebenen oder zwei Ebenen lässt Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung zu. Dadurch lässt sich ein im Unterrichtsvorhaben E-G2 begonnenes Thema ausbauen.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Körper und Schnitte werden mit dem MMS bzw. einer dynamischen Geometriesoftware räumlich dargestellt und überprüft (Ope-11, Ope-12).
- MKR 4.1 (Medienproduktion und Präsentation): Die Lernenden dokumentieren eine Untersuchung an einem Körper als digitales Lernprodukt und präsentieren es (Kom-10).
- MKR 4.3 (Quellendokumentation): Fremde Abbildungen und Materialien werden mit Quellenangabe verwendet (Kom-10).

Europabezug:

- Als Untersuchungsobjekte eignen sich auch europäische Bauwerke (z.B. das Atomium in Brüssel oder die Glaspyramide des Louvre).

Summe Grundkurs Q1: 120 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 77 Unterrichtsstunden

Qualifikationsphase

Grundkurs Q2

Unterrichtsvorhaben GK-8: *Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (GK-A5)*
(**Zeitbedarf**: ca. 13 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(9) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$),

(10) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.

Umsetzung:

In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer wiederholenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand.

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg II – Modellierung mit Exponentialfunktionen“ im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 2.1 (Informationsrecherche): Die Lernenden recherchieren reale Wachstumsdaten (z.B. bei Eurostat) und reflektieren die Herkunft der Daten (Ope-10).
- MKR 2.3 (Informationsbewertung): Darstellungen von Wachstumsprozessen in Alltagsmedien werden unter mathematischen Gesichtspunkten beurteilt (Kom-14).
- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Wachstumsmodelle werden mit dem MMS an Daten angepasst und verglichen (Ope-12).

Europabezug:

- Wachstumsprozesse werden auch an europäischen Daten untersucht (z.B. Bevölkerungs- oder Energiedaten von Eurostat).

Hinweis:

- Bei ausreichender Zeit kann dieses Unterrichtsvorhaben bereits am Ende der Q1 begonnen werden.

Unterrichtsvorhaben GK-9: *Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (GK-A6)*
(**Zeitbedarf**: ca. 9 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an,

(6) wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an,

(8) nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,

Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,

Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,

Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,

Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege.

Umsetzung:
In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produktregel und Spezialfall der Kettenregel für Verknüpfungen von Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen) hergeleitet. Dazu können zunächst Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Vorgelegte Argumentationsketten werden erläutert, beurteilt und für den Beweis der Produktregel genutzt. Die Kettenregel für Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen im Exponenten kann graphisch mithilfe der bekannten Zusammenhänge beim Transformieren von Funktionsgraphen entdeckt werden.

Mithilfe der neu gewonnenen Ableitungsregeln werden schließlich in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen betrachtet und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben verwendet. Dabei ist es mithilfe eines MMS oder mithilfe von vorgegebenen Ableitungen auch möglich, weitere Verkettungen von ganzrationalen Funktionen mit Exponentialfunktionen zu betrachten. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Hinweis zur Kompetenzentwicklung:
- Die Ableitungen der Sinus- und Kosinusfunktion (Kompetenzerwartung (5)) folgen in GK-10.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):
- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Vermutungen zu Produkt- und Kettenregel werden mit dem MMS überprüft (Ope-11).

Unterrichtsvorhaben GK-10: *Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (GK-A7)*
(**Zeitbedarf**: ca. 11 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen:

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an,

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung,

(8) nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge,

(19) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,

(20) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
- Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte.

Umsetzung:

Im letzten Unterrichtsvorhaben zur Analysis werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs…), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. Integrale von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen können in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet werden.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) untersucht, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen abgeleitet und mit anderen Funktionen verknüpft werden.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 4.1 (Medienproduktion und Präsentation): In arbeitsteiliger Gruppenarbeit zu Anwendungsaufgaben entstehen digitale Präsentationen, die im Kurs vorgestellt werden (Kom-10).
- MKR 4.2 (Gestaltungsmittel): Die Präsentationen werden hinsichtlich Darstellung und Aussagekraft beurteilt (Kom-10).
- MKR 5.4 (Selbstregulierte Mediennutzung): Die Lernenden reflektieren, wo das MMS bei der Untersuchung zusammengesetzter Funktionen an Grenzen stößt (Ope-14).

Unterrichtsvorhaben GK-11: *Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (GK-S1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 17 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
(3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
(5) bestimmen das Gegenereignis $\bar{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \backslash B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
(6) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
(7) prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
(8) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
(9) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
(10) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang.

Umsetzung:
Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten, wie Zufallsantworten bei sensitiven Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).
Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet.

Hinweis:

- Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Die Lernenden planen eine eigene statistische Erhebung und werten sie digital aus; Simulationen mit dem Zufallsgenerator des MMS veranschaulichen das Gesetz der großen Zahlen (S-(1), S-(3)).
- MKR 2.2 (Informationsauswertung): Informationen zu Diagnosetests und Umfragen werden in Vierfeldertafeln und Baumdiagramme übertragen (Kom-1).

Europabezug:

- Für Erhebungen und Vierfeldertafeln eignen sich auch europäische Vergleichsdaten (z.B. Eurostat).

Unterrichtsvorhaben GK-12: *Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung (GK-S2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,

(6) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,

(11) begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen.

Umsetzung:
Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoulli-Kette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulli-Ketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoulli-Kette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich.

Vernetzung:

- Das Summenzeichen wird als Schreibweise bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung wieder aufgegriffen.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 2.1 (Informationsrecherche): Sachkontexte für Binomialverteilungen werden aus Zeitungsartikeln und anderen Medien recherchiert und kritisch geprüft (Ope-10).
- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Binomialverteilungen werden mit dem MMS berechnet und als Histogramm dargestellt (Ope-11).

Unterrichtsvorhaben GK-13: *Änderungen und Auswirkungen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (GK-S3)*

(**Zeitbedarf**: ca. 11 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(10) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,

(12) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,

(13) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen,

(14) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:
Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k, p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit wird bewusst als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit interpretiert. Die Genauigkeit dieser Schätzung steigt mit dem Stichprobenumfang.

Vertiefung:

- In einem Sachkontext wird das Konzept der σ-Umgebungen exemplarisch behandelt.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Der Einfluss von n und p auf die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen wird mit Schiebereglern im MMS untersucht (Ope-12).
- MKR 5.4 (Selbstregulierte Mediennutzung): Die Lernenden entscheiden, welche Berechnungen sie hilfsmittelfrei und welche mit dem MMS durchführen (Ope-13).

Summe Grundkurs Q2: 90 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 71 Unterrichtsstunden

Qualifikationsphase

Leistungskurs Q1

Unterrichtsvorhaben LK-1: *Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (inklusive LGS) (LK-A2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)
Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(4) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,

(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen.

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G): Die Schülerinnen und Schüler

(6) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,

(7) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind,

(8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein.

Umsetzung:

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrie, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen finden. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden.

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen. Über freie Parameter (in Lösungen aus unterbestimmten Gleichungssystemen) können Funktionsscharen erzeugt werden; dies bereitet die Untersuchung von Funktionsscharen in LK-2 vor.

Hinweise:

- Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig zur Spline-Interpolation forschen und referieren zu lassen.

Vernetzung:

- In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahren und mögliche Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme (leere Menge, eindeutige Lösung oder unendlich viele Lösungen) schwerpunktmäßig behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie erneut benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt mehr bilden. Verschiedene Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme werden bei den Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen wieder aufgegriffen und geometrisch gedeutet (leere Menge, Punkt, Gerade, Ebene).

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.1 (Medienausstattung (Hardware)): Die Lernenden richten zu Beginn der Qualifikationsphase ihre Arbeitsumgebung ein (iPad mit der TI-Nspire™ CAS-App, digitale Heftführung) und entscheiden begründet, wann sie das MMS und wann analoge Hilfsmittel einsetzen (Ope-13).
- MKR 1.3 (Datenorganisation): Unterrichtsdokumente, MMS-Dateien und Lösungen werden in einer verabredeten Ordnerstruktur gespeichert und über die schulische Cloud abgerufen (Ope-11).
- MKR 6.2 (Algorithmen erkennen): Das Gauß-Verfahren wird als Algorithmus erläutert, ohne MMS auf kleine Gleichungssysteme angewendet und mit der Lösung durch das MMS verglichen (G-(6), G-(7)).

Unterrichtsvorhaben LK-2: *Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern (LK-A1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 22 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Fortführung der Differentialrechnung: Funktionsscharen, Extremwertprobleme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) lösen biquadratische Gleichungen auch ohne Hilfsmittel,

(2) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,

(6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege.

Umsetzung:
Anknüpfend an die in LK-1 rekonstruierten ganzrationalen Funktionen werden Funktionen vierten Grades vertieft untersucht. Dies umfasst insbesondere das hilfsmittelfreie Lösen von biquadratischen Gleichungen.

Anschließend werden zunächst Optimierungsprobleme mit ganzrationalen Funktionen ohne Parameter betrachtet. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (noch ohne die Produkt- oder Kettenregel). Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden, ohne dass Ableitungen hilfsmittelfrei gebildet werden müssen (z.B. „Zylinder in einer Kugel“).

Anschließend werden Optimierungsprobleme bei Funktionen mit Parametern betrachtet. Hier kann z.B. auch das Problem der offenen Schachtel wieder aufgegriffen werden, indem nicht von einem Papier mit festen Maßen ausgegangen wird, sondern nur ein Seitenverhältnis der Papierseiten vorgegeben wird oder die Länge einer Seite offenbleibt, sodass bei der Zielfunktion eine Parameterabhängigkeit entsteht.

Mit vorgegebenen ganzrationalen Funktionen mit Parametern (Funktionsscharen) werden anknüpfend innermathematische Situationen (Funktionsscharen) und anwendungsbezogene Kontexte mit Parametern (z.B. Brücken, Gebäude, Flugbahnen) untersucht, bei denen Extrempunkte eine Rolle spielen. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Schieberegler und Graphen im MMS dienen zur Untersuchung des Parametereinflusses bei Funktionenscharen und zur Kontrolle von Ortskurven; Zielfunktionen von Extremwertproblemen werden graphisch und numerisch untersucht (Ope-12).

Unterrichtsvorhaben LK-3: *Von der Änderungsrate zum Bestand (LK-A3)*
(**Zeitbedarf**: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(14) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,
(15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
(16) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,
(17) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben II der Einführungsphase (E-A2). Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Rekonstruktion einer Größe (z.B. physikalische Arbeit) thematisiert, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt.

Der Einstieg sollte über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsummen) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit werden immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit dem Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Aus den übereinstimmenden Grenzwerten von Ober- und Untersummen ergibt sich die Definition des Integrals.

Hinweise:

- Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden.

Materialhinweis:

- Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (2008) in der Materialdatenbank entnommen werden: https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=448&idcat=378&lang=9&client=12&matId=2033

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Produktsummen werden in einer Tabellenkalkulation bzw. der Tabellenansicht des MMS berechnet und für feinere Zerlegungen verglichen (Kom-7, Ope-11).
- MKR 4.1 (Medienproduktion und Präsentation): Die Lernenden erstellen in Gruppen ein digitales Lernprodukt (z.B. kurzes Erklärvideo oder Präsentation) zum Übergang von der Produktsumme zum Integral und präsentieren es (Kom-10).
- MKR 4.2 (Gestaltungsmittel): Gestaltung und Verständlichkeit der Lernprodukte werden kriteriengeleitet beurteilt (Kom-10).
- MKR 4.3 (Quellendokumentation): Verwendete fremde Abbildungen und Materialien werden mit Quellenangabe dokumentiert (Kom-10).

Unterrichtsvorhaben LK-4: *Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (LK-A4)*

(**Zeitbedarf**: ca. 22 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung,

(15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,

(18) begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs und wenden den Hauptsatz an,

(19) bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen und verwenden die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \mapsto \frac{1}{x}$,

(20) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen,

(21) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion,

(22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,

Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,

Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,

Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang.

Umsetzung:

Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird anschaulich, kontextgebunden und numerisch begründet.

Um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch tiefergehend zu begründen, wird der absolute Zuwachs $I_a(x+h) - I_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. In diesem Rahmen werden auch die Intervall-additivität und Linearität des Integrals formal gefasst.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen für Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet. Dabei finden sie auch heraus, dass dies nicht in jedem Fall möglich ist und es Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{x}$ gibt, für deren Stammfunktionen noch kein Funktionsterm zur Verfügung steht.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden für die Berechnung von Flächen zwischen Funktionsgraphen genutzt und auf weitere zunehmend komplexe innermathematische und anwendungsorientierte Situationen übertragen. Geeignete Problemstellungen werden auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Integralfunktionen, Flächen zwischen Graphen und Rotationskörper werden mit dem MMS visualisiert und berechnet; hilfsmittelfreie und digitale Lösungswege werden einander gegenübergestellt (Ope-11, Ope-12).

Unterrichtsvorhaben LK-5: *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (LK-G1)*

(**Zeitbedarf**: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperation: Skalarprodukt

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(2) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,

(12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,

Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,

Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung zunächst eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont, der später zum Verständnis der Abstandsmessung zwischen Punkten und Ebenen genutzt werden kann.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Am Beispiel der physikalischen Arbeit wird das geometrische Verständnis des Skalarprodukts veranschaulicht.

Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die besonderen formalen Eigenschaften des Skalarprodukts sowie die dafür gültigen Rechengesetze werden im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. keine Division durch einen Vektor, kein Satz vom Nullprodukt) sowie vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen thematisiert.

Vertiefung:

- Im Rahmen eines arbeitsteiligen Vorgehens kann ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt dahinterliegende elementargeometrische Sätze transparent machen wie z.B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 0$ und $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ für die Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eines Parallelogramms. Ein ähnliches Vorgehen ist beim Beweis des Satzes des Thales möglich.
- Im Sinne der Wissenschaftspropädeutik ist neben einem Einblick in die Möglichkeit einer axiomatischen Festlegung eines Skalarproduktes durch seine algebraischen Eigenschaften wichtig, dass durch ein Skalarprodukt zugleich Längen- als auch Winkelmessung in einem Vektorraum ermöglicht werden.

Hinweis:

- Laut schulinternem Curriculum der EF können die Lagebeziehungen zwischen Geraden („Elemente der Mathematik“ EF, Abschnitt 4.6) in die Q1 verlegt werden. In diesem Fall werden sie zu Beginn dieses Unterrichtsvorhabens zusammen mit einer Wiederholung von Vektoren und Geraden behandelt.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Vektoren, Geraden und Winkel werden in einer dreidimensionalen Darstellung des MMS bzw. einer dynamischen Geometriesoftware veranschaulicht (Ope-11).
- MKR 2.2 (Informationsauswertung): Im Stationenlernen zu Schnittwinkeln entnehmen die Lernenden Informationen aus digitalen und analogen Materialien und strukturieren sie (Kom-1).

Unterrichtsvorhaben LK-6: *Parametrisierung von Ebenen (LK-G3)*
(**Zeitbedarf**: ca. 6 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) stellen Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke in Parameterform dar,
(5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
(7) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind,
(8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
– Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
– Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:
Ausgehend von der Parameterform von Geraden wird die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. Als Einstiegskontext dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten oder eine Solaranlage auf einem Dach. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus der Einführungsphase wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs der Parameter werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben.

Schnittpunkte von Geraden und Ebenen werden in diesem Unterrichtsvorhaben über ein 3x3-Gleichungssystem bestimmt, wenn beide in Parameterform vorliegen; dabei wird die Lösungsmenge geometrisch gedeutet. Normalen- und Koordinatenform sowie die systematische Untersuchung von Lagebeziehungen folgen in LK-7.

Vernetzung:

- Der Unterricht wird durch den Einsatz eines MMS bei der Lösung linearer Gleichungssysteme entlastet. Es ist jedoch sinnvoll, numerisch einfache Fälle auch hilfsmittelfrei zu bearbeiten, um die bereits im Unterrichtsvorhaben LK-1 erworbenen Kompetenzen zu reaktivieren und zu festigen.

Vertiefung:

- Das Vektorprodukt liefert einen zu beiden Spannvektoren orthogonalen Vektor und kann hier vertiefend eingeführt werden; zur Bestimmung eines Normalenvektors wird es in LK-7 genutzt. Es ist nicht primär wegen der technischen Einfachheit gewinnbringend, sondern weil die Entwicklung einer tragfähigen geometrischen Vorstellung des Vektorproduktes sowie eine Beschreibung seiner algebraischen Eigenschaften den im Unterrichtsvorhaben LK-5 für das Skalarprodukt beschrittenen Weg weiterverfolgt und auch eine hohe Relevanz für den Physikunterricht besitzt. Vertiefend kann das Vektorprodukt für die Flächenberechnung bei Parallelogrammen und Dreiecken sowie für die Volumenberechnung beim Spatprodukt eingesetzt werden.
- Vertiefend kann die Parallelität zwischen einer Ebene und einer Geraden durch die lineare Abhängigkeit des Richtungsvektors der Geraden von den Spannvektoren der Ebene beschrieben werden (Komplanarität).

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke werden mit dem MMS räumlich dargestellt; Gleichungssysteme zur Punktprobe und zu Schnittmengen werden mit dem MMS gelöst und interpretiert (Ope-12).

Unterrichtsvorhaben LK-7: *Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen (LK-G2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 13 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(2) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
(4) untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen,
(5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
(8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen,
(9) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege.

Umsetzung:
Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an das Unterrichtsvorhaben LK-5 anknüpfender Weg vorgeschlagen: Betrachtet wird die als Punkt-Normalenform bekannte Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen wie $\vec{a} = \vec{0}$ wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Die Schnittmenge zweier Ebenen wird durch Lösung eines linearen 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Dabei müssen die Lernenden eine nicht leere Lösungsmenge selbständig parametrisieren und als Schnittgerade identifizieren. Da die Parameterform aus LK-6 bekannt ist, wird ein Normalenvektor auch als zu beiden Spannvektoren orthogonaler Vektor bestimmt; so werden Parameter- und Koordinatenform ineinander überführt.

Zur Klärung der Parallelität von Geraden und Ebenen oder Ebenen untereinander werden Normalenvektoren herangezogen. Über die Normalenvektoren wird die Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren auch auf Ebenen übertragen.

Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform[1] als Sonderformen der Normalenform) werden in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse.

Die Hesse-Normalenform[1] erlaubt es, Abstände eines Punktes von der Ebene sowie Abstände zwischen parallelen Ebenen direkt abzulesen. Dabei wird eine Verknüpfung zur Grundvorstellung der Projektion (LK-5) hergestellt. Verfahrenstechnisch macht es keinen Unterschied, ob es sich nun um den Abstand eines Punktes, einer parallelen Geraden oder einer parallelen Ebene von einer Ebene handelt.

Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Die Achsenabschnittsberechnung ist dabei nur ein Spezialfall der besonders einfachen Schnittmengenberechnung zwischen Geraden und Ebenen (Durchstoßpunkt) in Koordinatenform.

Einen verständnisorientierten Zugang zur Abstandsberechnung zwischen einem Punkt und einer Ebene bietet das Lotfußpunktverfahren, das auch auf weitere Abstandsprobleme (vgl. LK-8) übertragen werden kann.

Vernetzung:

- Die Gleichungen eines linearen $2x3$- oder $3x3$-Gleichungssystems (LK-1) können als Koordinatengleichungen interpretiert werden, so dass die Lösungsmenge des LGS als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden kann. Ihre Dimension lässt sich aus der Lagebeziehung der Ebenen erkennen. Dabei wird deutlich, wie weit die Normalenvektoren die Lagebeziehungen zwischen 2 oder 3 Ebenen bestimmen.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 2.2 (Informationsauswertung): In arbeitsteiliger Gruppenarbeit zur Lage von Gerade und Ebene erarbeiten die Lernenden das Verfahren aus Materialien und bereiten es für die anderen Gruppen auf (Kom-1).
- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Die Zeilenstufenform wird mit dem MMS bestimmt und im Hinblick auf die Lagebeziehung gedeutet (Ope-12).

[1] Die Hesse-Normalenform gehört nicht zur Obligatorik des KLP und ist damit nicht verpflichtend. Aus didaktischen Gründen wurde sie für diesen Zugang in diesem beispielhaften Plan vertiefend integriert.

Unterrichtsvorhaben LK-8: *Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (LK-G4)*
(**Zeitbedarf**: ca. 6 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
(12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.

Umsetzung:

Die Abstandsbestimmung erweitert sowohl die Beschreibung von Lagebeziehungen als auch die Schnittmengenproblematik. Bei Ebenen wurden Abstandsbestimmungen bereits im Unterrichtsvorhaben LK-7 mit der Hesse-Normalenform behandelt.

Am Beispiel des Vorbeifluges eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen, insbesondere ein Lösungsweg mit den Mitteln der Analysis. Die Mittel der Analysis lassen sich auch nutzen, um im Anschluss den minimalen Abstand zweier Flugobjekte mithilfe eines MMS zu bestimmen.

Im Unterschied dazu knüpft die Abstandsberechnung von Flugbahnen an die Untersuchung von Lagebeziehungen von Geraden aus dem Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Ihre Berechnung kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten - insbesondere unter Einschluss von Hilfsebenen - genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nicht.

Vernetzung:

- Das Unterrichtsvorhaben knüpft sehr eng an das Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Insbesondere ist eine integrierende Wiederholung der Lagebeziehungen von Geraden und ihrer Bestimmung vorzusehen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung (vgl. LK-2) bietet sich durchgehend an und sollte unter der Maxime einer möglichst großen Lösungsvielfalt und als Chance zur Binnendifferenzierung nicht fehlen.

Unterrichtsvorhaben LK-9: *Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Einschluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder (LK-G5)*

(**Zeitbedarf**: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfelder: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) stellen Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke in Parameterform dar,
(3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
(5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
(9) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
(11) führen Spiegelungen an Ebenen durch,
(12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
– Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
– Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte.

Umsetzung:
Geometrische Körper, wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder, bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere eine Grundebene, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Durch Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) wird die Frage nach einer systematischen Untersuchung von Spiegelungen an Ebenen evoziert. Dabei wird das Verfahren der Lotfußpunktbestimmung mit Hilfe eines Normalenvektors (LK-7) wiederaufgegriffen, wobei in der Spiegelungsebene die Schattenbilder erneut auftreten.

Abstandsbestimmungen von Punkten zu Geraden (LK-8) und zu Ebenen (LK-7) ermöglichen es, die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen.

Im Rahmen der Untersuchung geometrischer Körper werden Winkel zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmt. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Die Parameterform von Ebenen hat ihren Einsatz vor allem da, wo es um die Frage geht, ob ein Durchstoßpunkt einer Geraden (z.B. ein Lotfußpunkt, Schattenpunkt) eine bestimmte Fläche trifft oder außerhalb dieser liegt.

In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Dokumentation von Lösungswegen gelegt.

Vernetzung:
- Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem UV E-G1 wieder auf.
- Beim Berechnen von Flächen und Volumina werden, wo möglich, auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt. Vertiefend ist hier auch der Einsatz des Vektorproduktes (vgl. LK-6) möglich.

Vertiefung:
- Virtuelle Landschaften mit Lichteffekten können im Rahmen einer begrenzten Projektarbeit/Facharbeit mit räumlicher Geometriesoftware gestaltet werden. In einem Kaleidoskop können Spiegelungen verkettet werden und so auch Drehsymmetrien erzeugt werden.
- Ein MMS bietet die Möglichkeit, vertiefend das Spatprodukt bzw. die Determinante als Kontrollgröße für Volumina kennenzulernen, ohne die dahinterliegenden algebraischen Strukturen offenzulegen. Auch über die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren und speziell über den Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden können damit Aussagen gemacht werden, die ein tiefergehendes geometrisches Verständnis unterstützen.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):
- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Körper, Schattenwürfe und Spiegelbilder werden mit dem MMS bzw. einer dynamischen Geometriesoftware räumlich dargestellt und überprüft (Ope-11, Ope-12).
- MKR 4.1 (Medienproduktion und Präsentation): Die Lernenden dokumentieren eine Problemlösung als digitales Lernprodukt und präsentieren es (Kom-10).
- MKR 4.3 (Quellendokumentation): Fremde Materialien und Abbildungen werden mit Quellenangabe verwendet (Kom-10).

Europabezug:
- Als Untersuchungsobjekte eignen sich auch europäische Bauwerke (z.B. das Atomium in Brüssel oder die Glaspyramide des Louvre).

Unterrichtsvorhaben LK-10: *Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen (LK-G6)*
(**Zeitbedarf**: ca. 6 Ustd.)

Inhaltsfelder: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Verknüpfung aller Bereiche

Kompetenzerwartungen:
Integrierende Wiederholung aller Kompetenzen des Inhaltsfeldes

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:
Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Schülerinnen und Schülern prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösungen mit prozessbezogenen Zielen verbunden: 1) eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, 2) geometrische Hilfsobjekte einzuführen, 3) an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, 4) bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, 5) unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt zu vergleichen.

Bei der Durchführung der Lösungswege können die Schülerinnen und Schüler auf das entlastende Werkzeug MMS zurückgreifen und dessen Grenzen ausloten. Bei aufwendigeren Problemen soll dieser Teil der Lösung bewusst ausgeklammert werden.

Die erworbenen Kompetenzen im Problemlösen sollen auch in Aufgaben zum Einsatz kommen, die einen Kontextbezug enthalten, so dass dieses Unterrichtsvorhaben auch unmittelbar auf das Abitur vorbereitet.

Die Strategieentwicklung erfolgt vorrangig an ausgewählten Abituraufgaben zur Analytischen Geometrie und Linearen Algebra, die zum Abschluss des Geometrieblocks in der Q1 bearbeitet werden. In der Abiturvorbereitung der Q2 werden diese Strategien an weiteren Abituraufgaben aufgegriffen.

Vertiefung:

- Bei Beweisaufgaben, in denen die prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens und Problemlösens zusammengeführt werden müssen, sollen die Schülerinnen und Schüler auch Formalisierungen in Vektorschreibweise rezipieren und z.T. selbst vornehmen.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 5.4 (Selbstregulierte Mediennutzung): An Abituraufgaben entscheiden die Lernenden, welche Teile sie mit dem MMS und welche bewusst ohne MMS bearbeiten, und reflektieren Möglichkeiten und Grenzen des Werkzeugs (Ope-14).

Unterrichtsvorhaben LK-11: *Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (LK-A7)*
(**Zeitbedarf**: ca. 14 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,

(6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,

(8) deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen,

(9) nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,

Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,

Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang.

Umsetzung:
In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) hergeleitet. Die Vorstellung des Ableitens als lokale lineare Approximation wird dabei mithilfe eines MMS aufgegriffen. Die Ableitungsregeln können zunächst als Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen bzw. für einfache Verkettungen (z.B. Potenz einer ganzrationalen Funktion) aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Mindestens eine der neuen Ableitungsregeln soll bewiesen werden. An dieser Stelle sind Differenzierungen z.B. durch Einsatz eines Beweispuzzles oder Beurteilungen von vorgelegten Argumentationsketten möglich.

Die aus der Sekundarstufe I (Klasse 10) und der Einführungsphase bekannten Sinus- und Kosinusfunktionen werden wiederholt; ihre Ableitungen werden graphisch über den Verlauf der Steigung erschlossen und mithilfe eines MMS bestätigt. Mithilfe der neu gewonnenen Ableitungsregeln werden schließlich zusammengesetzte Funktionen (aus ganzrationalen Funktionen, Wurzelfunktionen sowie Sinus- und Kosinusfunktionen) untersucht und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben eingesetzt. Dabei werden auch Funktionsscharen betrachtet. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Dabei werden auch periodische Situationen (z.B. Sonnenscheindauer im Jahresverlauf) mit Sinus- und Kosinusfunktionen wiederholend modelliert; die Parameter werden mit und ohne MMS bestimmt.

Hinweis:

- Die lineare Approximation stellt eine Möglichkeit dar, die Beweise der Ableitungsregeln fachlich korrekt und einsichtig zu notieren.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Vermutungen zu Produkt- und Kettenregel und zu den Ableitungen von Sinus und Kosinus werden mit dem MMS überprüft; die lokale lineare Approximation wird durch Zoomen veranschaulicht (Ope-11).

Unterrichtsvorhaben LK-12: *Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (LK-A5)*
(**Zeitbedarf**: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,

(10) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$),

(11) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.

Umsetzung:

In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS kann das Verhalten des Differenzenquotienten für immer kleinere h betrachtet werden. Durch Variation der Stelle der Ableitung entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand (Differentialgleichung).

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse und Wachstumsprozesse mit Parametern (Funktionsscharen) betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und die Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Hinweis:

- Das Unterrichtsvorhaben beginnt am Ende der Q1 (bis zur Einführung der Euler'schen Zahl) und wird nach den Sommerferien zu Beginn der Q2 abgeschlossen; die Vertiefung erfolgt in LK-13.

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg II – Modellierung mit Exponentialfunktionen" im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 2.1 (Informationsrecherche): Die Lernenden recherchieren reale Wachstumsdaten (z.B. Meeresspiegel, Bevölkerung) und reflektieren die Herkunft der Daten (Ope-10).
- MKR 2.3 (Informationsbewertung): Darstellungen von Wachstumsprozessen in Alltagsmedien werden unter mathematischen Gesichtspunkten beurteilt (Kom-14).
- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Wachstumsmodelle werden mit dem MMS an Daten angepasst und verglichen (Ope-12).

Europabezug:

- Wachstumsprozesse werden auch an europäischen Daten untersucht (z.B. Bevölkerungs- oder Energiedaten von Eurostat).

Summe Leistungskurs Q1: 200 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 152 Unterrichtsstunden

Qualifikationsphase

Leistungskurs Q2

Unterrichtsvorhaben LK-13: *Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (LK-A8)*
(**Zeitbedarf**: ca. 20 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung,

(9) nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge,

(22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen,

(23) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen sowie mithilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
- Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte.

Umsetzung:

Im letzten Unterrichtsvorhaben zur Analysis vor der Stochastik werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Anhand der Volumina von Körpern (einfache geometrische Grundkörper, Gefäße, Zeppelin, …), die sich durch Rotation eines Graphen um die x-Achse beschreiben lassen, werden verschiedene Aspekte der Differential- und Integralrechnung vernetzt und vertieft:

- Aufstellen der Randfunktion mit Definitionsbereich (Vernetzung mit Steckbriefaufgaben)
- Integralvorstellung (Kreisscheiben, Grenzwertprozess)
- Nachweis / Bildung von Stammfunktionen
- Berechnung von bestimmten Integralen

Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs…), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. In geeigneten Kontexten werden uneigentliche Integrale als Grenzwert der jeweils zugehörigen Integralfunktion eingeführt und bestimmt.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) betrachtet, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen mit anderen Funktionen verknüpft werden. Integrale von zusammengesetzten Funktionen, Exponentialfunktionen und Sinusfunktionen werden in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet.

Vertiefung:

- Bei der Betrachtung von Rotationskörpern bieten Hohlkörper und der Torus (z.B. Fahrradschlauch) einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Vernetzung:

- Kenntnisse über uneigentliche Integrale ermöglichen ein vertieftes Verständnis der Normalverteilung und ihrer Verteilungsfunktion.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 4.1 (Medienproduktion und Präsentation): In arbeitsteiliger Gruppenarbeit zu Anwendungsaufgaben (z.B. Wirkstoffkonzentration, Wassertank) entstehen digitale Präsentationen, die im Kurs vorgestellt werden (Kom-10).
- MKR 4.2 (Gestaltungsmittel): Die Präsentationen werden hinsichtlich Darstellung und Aussagekraft beurteilt (Kom-10).
- MKR 5.4 (Selbstregulierte Mediennutzung): Die Lernenden reflektieren, wo das MMS bei uneigentlichen Integralen und Funktionsuntersuchungen an Grenzen stößt (Ope-14).

Unterrichtsvorhaben LK-14: *Modellierung wiederholter Trefferexperimente mit der Binomialverteilung – Berechnung, Umkehrung und Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten in Sachkontexten (LK-S1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 14 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Pfadregeln
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ-Regeln

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,
(6) erklären die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten und berechnen diesen in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel,
(7) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
(12) begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können,
(13) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,
(14) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang.

Umsetzung:
Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Treffer" oder „Nicht-Treffer") wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoulli-Kette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulli-Ketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoulli-Kette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Ausgehend von der kombinatorischen Bedeutung wird der Binomialkoeffizient im Folgenden in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel berechnet. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt; mithilfe eines MMS wird der Einfluss der Parameter n und p auf die Verteilung untersucht.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation"), indem bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit Trefferzahl, Kettenlänge oder Trefferwahrscheinlichkeit bestimmt werden. Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich.

Vernetzung:
- Das Summenzeichen wird als Schreibweise für die Summe aller Wahrscheinlichkeiten einer Verteilung eingeführt und in LK-16 bei den Kenngrößen wieder aufgegriffen.
- Die Unabhängigkeit der Stufen wird hier inhaltlich begründet; der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit wird in LK-15 präzisiert.
- Erwartungswert und Standardabweichung werden in diesem Unterrichtsvorhaben bewusst noch nicht verwendet; sie werden in LK-16 entwickelt und auf die Binomialverteilung übertragen.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):
- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Binomialverteilungen werden mit dem MMS als Einzelwert und als Liste berechnet, grafisch dargestellt und durch Variieren der Parameter untersucht; kumulierte Wahrscheinlichkeiten werden auch für großes n bestimmt (Ope-11, Ope-12).

Unterrichtsvorhaben LK-15: *Abhängig oder nicht? – Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit (LK-S2)*

(**Zeitbedarf**: ca. 9 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(5) bestimmen das Gegenereignis $\bar{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \backslash B, A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,

(7) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,

(8) prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,

(9) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang.

Umsetzung:
Das Unterrichtsvorhaben schließt an LK-14 an; Baumdiagramme, Pfadregeln und das Ziehen mit und ohne Zurücklegen werden zu Beginn kurz reaktiviert. Leitend ist die Frage, wann ein Ereignis ein anderes beeinflusst. Anhand von Zufallsexperimenten, die über Bernoulli-Ketten hinausgehen, werden mehrstufige Zufallsexperimente untersucht. Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet; Ereignisse werden verknüpft und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten bestimmt.

Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten wie Zufallsantworten bei sensitiven Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).

Neben dem Baumdiagramm wird das umgekehrte Baumdiagramm genutzt, um von der Vierfeldertafel ausgehend Wahrscheinlichkeiten mit vertauschter Bedingung zu bestimmen. Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeiten sind aus der Sekundarstufe I (Klasse 10) bekannt und werden zügig wiederholt; der Schwerpunkt liegt auf dem Vertauschen von Merkmal und Bedingung und auf der stochastischen Unabhängigkeit.

Vernetzung:
- Der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit präzisiert die Modellannahme der Bernoulli-Kette aus LK-14; die Modellkritik aus LK-14 wird damit fachlich gefasst.
- Baumdiagramme und Pfadregeln werden in der Abiturvorbereitung integrierend wiederholt.

Hinweis:
- Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):
- MKR 2.2 (Informationsauswertung): Informationen zu Testverfahren (z.B. aus Beipackzetteln oder Medienberichten) werden in Vierfeldertafeln und Baumdiagramme übertragen (Kom-1).

Unterrichtsvorhaben LK-16: *Was ist zu erwarten? – Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen und Binomialverteilungen (LK-S3)*

(**Zeitbedarf**: ca. 8 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ-Regeln

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,

(10) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,

(11) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,

(13) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,

(14) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:
Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet. Zur Auswertung und graphischen Darstellung wird ein MMS verwendet.

An wenigen Glücksspielen wird der Begriff der Zufallsgröße über Trefferzahlen hinaus verallgemeinert und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt. Analog zu den Kenngrößen empirischer Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Anschließend wird zügig auf die aus LK-14 bekannten Binomialverteilungen übergegangen; die Lage des Maximums in der Nähe von $n \cdot p$ wird mit dem Erwartungswert erklärt

Anknüpfend an die in LK-14 mithilfe des MMS untersuchte Wirkungvon n und p auf die Gestalt der Verteilung werden anhand von Histogrammen im MMS der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.
In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden Erwartungswert und Standardabweichung sodann zur Beschreibung und Beurteilung binomialverteilter Zufallsgrößen genutzt. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Vernetzung:

- Erwartungswert und Standardabweichung der Binomialverteilung sind die Grundlage für die σ-Regeln in LK-17.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Erwartungswert und Varianz werden in der Tabellenansicht des MMS berechnet; der Einfluss von n und p wird mit Schiebereglern untersucht (Ope-12).

Unterrichtsvorhaben LK-17: *Prognose und Vertrauen – Schließen mit Prognose- und Konfidenzintervallen (LK-S4)*

(**Zeitbedarf**: ca. 13 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ-Regeln
- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,

(3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,

(14) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen,

(15) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit,

(16) ermitteln mit Hilfe der σ-Regeln Prognoseintervalle für die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Stichprobe und interpretieren diese im Sachkontext,

(17) ermitteln auf Grundlage einer relativen Häufigkeit ein Konfidenzintervall für den Parameter p einer binomialverteilten Zufallsgröße und interpretieren das Ergebnis im Sachkontext (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit),

(18) schätzen den für ein Konfidenzintervall vorgegebener Länge erforderlichen Stichprobenumfang ab.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen,
- Berechnen der Grenzen von Konfidenzintervallen,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,

Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten,

Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

Zu Beginn planen die Schülerinnen und Schüler eine eigene statistische Erhebung (z.B. eine Umfrage an der Schule) und beurteilen deren Aussagekraft. Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS (Nutzung des Zufallsgenerators) – zeigen, wie stark relative Häufigkeiten in Stichproben um die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit schwanken (Gesetz der großen Zahlen).

Das Konzept der σ-Umgebungen wird durch die Untersuchung von Binomialverteilungen mit verschiedenen n und p entwickelt. Die σ-Regeln werden benutzt, um Prognoseintervalle für unterschiedliche Sicherheitswahrscheinlichkeiten zu ermitteln und im Sachzusammenhang zu interpretieren. Dabei wird die Richtung des Schlusses bewusst gemacht: Von einer bekannten Wahrscheinlichkeit p wird auf zu erwartende Stichprobenergebnisse geschlossen.

Anschließend bietet sich die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen Stichprobenumfang und der Länge des Prognoseintervalls zu untersuchen und durch eine Visualisierung mithilfe eines MMS das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu veranschaulichen.

Ausgehend von der Modellierung einer Sachsituation (z.B. Wahrscheinlichkeit von Retouren im Onlinehandel; Glücksrad auf einer schiefen Ebene; Eichgewicht bei Lebensmittelverpackungen) mit einer Binomialverteilung, deren Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt ist, stellt sich die Frage nach der Schätzung der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit. Eine erste Annäherung erfolgt durch die Punktschätzung der relativen Häufigkeit in einer Stichprobe (Rückschluss auf die Gesamtheit).

Um zu einer Intervallschätzung zu kommen, werden zunächst mithilfe eines MMS von der Trefferwahrscheinlichkeit p abhängige 95%-Prognoseintervalle in einem Ellipsendiagramm dargestellt, deren Randfunktionen durch $h_{\pm}$ mit $h_{\pm}(p) = p \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ beschrieben werden.
Mithilfe dieser Darstellung kann für eine relative Häufigkeit in einer Stichprobe ein Intervall von Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, das mit dieser Stichprobe „verträglich“ ist. Dieses Intervall wird als Konfidenzintervall bezeichnet (Rückschluss auf die Gesamtheit). Um Konfidenzintervalle für andere relative Häufigkeiten, Sicherheitswahrscheinlichkeiten (Konfidenzniveaus) und Stichprobengrößen zu ermitteln, werden die Grenzen von Konfidenzintervallen auch rechnerisch mithilfe eines MMS bestimmt.

Gegen Ende des Unterrichtsvorhabens wird auch die Mindestgröße n einer Stichprobe zu einer vorgegebenen Länge eines Konfidenzintervalls abgeschätzt.
Bekannte Kontexte aus LK-14 werden wieder aufgegriffen, etwa als Prognoseintervall („Mit 95 % liegt die Anzahl zwischen … und …“). Das Konfidenzintervall kehrt die Blickrichtung um: vom Ergebnis der Stichprobe zurück auf die unbekannte Wahrscheinlichkeit. Im Unterschied zur Modellumkehrung in LK-14, bei der p aus einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit bestimmt wurde, wird p hier aus Stichprobendaten geschätzt.

Materialhinweise:

- Material: „Schätzen von Parametern – Prognose- und Konfidenzintervalle“ im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)
- Weitere Kontexte: Politbarometer; Corona-Schnelltests, auf deren Beipackzetteln oft Konfidenzintervalle angegeben sind

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Die Lernenden planen eine eigene Erhebung und werten sie digital aus; Simulationen mit dem Zufallsgenerator des MMS zeigen die Schwankung relativer Häufigkeiten (Ope-12).
- MKR 2.3 (Informationsbewertung): Umfrageergebnisse in Medien (z.B. Politbarometer) werden mithilfe von Konfidenzintervallen kritisch bewertet (Kom-14).
- MKR 5.4 (Selbstregulierte Mediennutzung): Die Lernenden reflektieren die Grenzen digital berechneter Intervalle und die Abhängigkeit von den Modellannahmen (Ope-14).

Unterrichtsvorhaben LK-18: *Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen (LK-S5)*

(**Zeitbedarf**: ca. 9 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve"), Parameter μ und σ, Graph der Verteilungsfunktion

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion,

(20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,

(21) beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß´sche Glockenkurve").

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:
Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dazu bietet sich an, zunächst mit einem MMS die Häufigkeiten der Augensummen von zwei, drei, vier… Würfeln zu simulieren, wobei in der graphischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich des Mittelwerts und der Standardabweichung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang, beispielsweise bei der Untersuchung des Abstandes der Wurftreffer zum Mittelpunkt einer Dartscheibe oder der Länge zufällig ausgewählter Schrauben.

Hervorzuheben ist im Unterricht, dass es sich bei Normalverteilungen um Wahrscheinlichkeitsverteilungen von stetigen Zufallsgrößen handelt, im Unterschied zu den bislang behandelten diskreten Zufallsgrößen.

Da im MMS Normalverteilungen einprogrammiert sind, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. LK-3).

Die Visualisierung und Berechnung von Flächen bzw. Wahrscheinlichkeiten erfolgt mithilfe eines MMS.

Der Einsatz des MMS wird zum Anlass genommen, festzustellen, dass es sich bei der Dichtefunktion einer Normalverteilung („Gauß'sche Glockenkurve") um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion („Gauß'sche Integralfunktion") kein Term angegeben werden kann.

Vernetzung:

- Zur Vernetzung mit Aspekten der Analysis (Grenzwertbetrachtung, Integralrechnung) bietet sich der Bezug zu uneigentlichen Integralen (LK-13) an.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 2.1 (Informationsrecherche): Daten zu annähernd normalverteilten Größen werden recherchiert und kritisch geprüft (Ope-10).
- MKR 5.4 (Selbstregulierte Mediennutzung): Die Lernenden reflektieren, warum Wahrscheinlichkeiten bei Normalverteilungen nur mit digitalen Werkzeugen oder Tabellen bestimmt werden können (Ope-14).

Unterrichtsvorhaben LK-19: *Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen (LK-A6)*
(**Zeitbedarf**: ca. 8 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,

(12) untersuchen ausgewählte Funktionen, insbesondere die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion, auf Umkehrbarkeit und ermitteln in einfachen Fällen einen Funktionsterm der Umkehrfunktion unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich,

(13) erläutern den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen seiner Umkehrfunktion,

(19) bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen und verwenden die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
– zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
– Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Anknüpfend an LK-12 (Übergang von der Basis b zur Darstellung mit der Euler'schen Zahl e und dem natürlichen Logarithmus) und an die Umkehrung der Fragestellung bei Wachstumsprozessen wird der Logarithmus nun nicht nur als Operator, sondern als (Umkehr-)Funktion betrachtet. Die Umkehrbarkeit von Funktionen wird ausgehend von graphischen Darstellungen und jeweils variierenden Definitionsbereichen am Beispiel der natürlichen Exponential- / Logarithmusfunktion und an anderen passenden Funktionen (z.B. Potenz- / Wurzelfunktionen) sowie Transformationen von diesen thematisiert. In einfachen Fällen werden Funktionsterme von Umkehrfunktionen dabei hilfsmittelfrei ermittelt. Der Zusammenhang zwischen den Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion wird unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich als Symmetrie zur Winkelhalbierenden erkannt.

Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird innermathematisch über den graphischen Zusammenhang zur natürlichen Exponentialfunktion (Winkelhalbierende als Symmetrieachse) und aus der Steigung einer gespiegelten Tangente hergeleitet. Damit wird der natürliche Logarithmus als Stammfunktion der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ identifiziert.

Vernetzung:

- Das Unterrichtsvorhaben liegt nach der Stochastik und schließt die Analysis ab. Es greift die natürliche Exponentialfunktion und den Logarithmus als Operator (LK-12) sowie die Funktionsuntersuchungen aus LK-13 wieder auf und vervollständigt die Stammfunktionsregeln aus LK-4; Aufgaben mit Logarithmusfunktionen werden anschließend in der Abiturvorbereitung mit den übrigen Funktionstypen vernetzt.

Vertiefung:

- Der Einfluss des Definitionsbereichs auf die Umkehrbarkeit kann gut am Beispiel der Sinus- und der Kosinusfunktion betrachtet werden.

Beitrag zum Medienkompetenzrahmen NRW (MKR):

- MKR 1.2 (Digitale Werkzeuge): Funktion und Umkehrfunktion werden mit der TI-Nspire CAS-App zusammen mit der Winkelhalbierenden dargestellt; der Einfluss eingeschränkter Definitionsbereiche auf die Umkehrbarkeit wird mit Schiebereglern untersucht (Ope-12).
- MKR 5.4 (Selbstregulierte Mediennutzung): Die Lernenden reflektieren, wo die grafische Darstellung im MMS an Grenzen stößt und eine algebraische Begründung der Umkehrbarkeit nötig ist (Ope-14).

Summe Leistungskurs Q2: 150 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 81 Unterrichtsstunden

2.2 Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachdidaktischen und fachmethodischen Grundsätze beschlossen.

Überfachliche Grundsätze:

1. Schülerinnen und Schüler werden in dem Prozess unterstützt, selbstständige, eigenverantwortliche, selbstbewusste, sozial kompetente und engagierte Persönlichkeiten zu werden.
2. Der Unterricht nimmt insbesondere in der Einführungsphase Rücksicht auf die unterschiedlichen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler.
3. Geeignete Problemstellungen bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
4. Die Unterrichtsgestaltung ist grundsätzlich kompetenzorientiert angelegt.
5. Der Unterricht vermittelt einen kompetenten Umgang mit Medien. Dies betrifft sowohl die private Mediennutzung als auch die Verwendung verschiedener Medien zur Präsentation von Arbeitsergebnissen.
6. Der Unterricht fördert das selbstständige Lernen und Finden individueller Lösungswege sowie die Kooperationsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler.
7. Die Schülerinnen und Schüler werden in die Planung der Unterrichtsgestaltung einbezogen.
8. Der Unterricht wird gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern evaluiert.
9. Die Schülerinnen und Schüler erfahren regelmäßige, kriterienorientierte Rückmeldungen zu ihren Leistungen.
10. In verschiedenen Unterrichtsvorhaben werden fächerübergreifende Aspekte berücksichtigt.

Fachliche Grundsätze:

11. Die Ziele sind transparent. Die Ziele einzelner Unterrichtsstunden und des jeweiligen Unterrichtsvorhabens sind für die Schülerinnen und Schüler transparent; ebenso der fachliche und curriculare Zusammenhang.
12. Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen folgt konsequent dem Spiralprinzip. Modelle, Strategien, Fachbegriffe und wesentliche Beispiele, auf die sich die Fachgruppe verständigt hat, werden verbindlich eingeführt und bei einer vertiefenden Behandlung wieder aufgegriffen.
13. Am Verstehen orientiertes Arbeiten baut tragfähige Grundvorstellungen auf und korrigiert Fehlvorstellungen. Der Wechsel zwischen formal-symbolischen, grafischen, situativen und tabellarischen Darstellungen ist dabei ein wesentlicher Baustein.
14. Mathematisches Operieren wird durch produktives Üben von Fertigkeiten, Routineaufgaben und algorithmischen Verfahren gesichert. Hilfsmittelfreie Fertigkeiten werden regelmäßig geübt, da Klausuren und Abiturprüfung hilfsmittelfreie Teile enthalten.
15. Das reflektierte und sachgerechte Arbeiten mit digitalen Werkzeugen ist Gegenstand des Unterrichts. Die TI-Nspire™ CAS-App wird zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Erkunden eingesetzt; Möglichkeiten und Grenzen des Werkzeugs werden reflektiert. Ergänzend werden GeoGebra Classic und eine Tabellenkalkulation genutzt.
16. Klausuren enthalten Teile, die ohne Hilfsmittel zu bearbeiten sind, sowie Aufgabenstellungen, die mit dem MMS zu lösen sind. Diese stehen in einem ausgewogenen Verhältnis.
17. Im Unterricht wird auf einen präzisen Sprachgebrauch und zunehmend auf eine angemessene Fachsprache geachtet. Die Operatoren der Abiturprüfung werden verbindlich eingeführt und genutzt.

18. Vielfältige Zugänge sind grundlegendes Prinzip der individuellen Förderung. Selbstdifferenzierende Aufgaben sowie fördernde und fordernde Aufgabenvariationen berücksichtigen Lerntempo und Leistungsniveau; kooperative Lernformen unterstützen diesen Prozess.
19. Die Selbsteinschätzung der Lernenden wird gestärkt. Die Lernenden erhalten bei Bedarf gezielte Übungsmöglichkeiten und konkrete Rückmeldungen zu Stärken und Schwächen.
20. Die Bedeutung der Mathematik für die Lebenswirklichkeit wird durch die Einbindung realer Situationen hervorgehoben. Beim Modellieren werden Annahmen offengelegt und Modelle kritisch beurteilt.
21. Der fachsystematische Aufbau der Mathematik wird an zentralen Ideen und grundlegenden Begriffen erfahrbar gemacht; die Oberstufe bereitet wissenschaftspropädeutisch auf ein Studium vor.
22. Das kreative und individuelle Betreiben von Mathematik wird angeregt und durch die Reflexion von Lernprozessen bewusst gemacht.
23. Alternative Lösungswege werden unterstützt und in Klausuren zugelassen; die fachliche Richtigkeit ist dabei ein zentrales Bewertungskriterium.
24. Auf das Abitur wird kontinuierlich vorbereitet: Aufgaben aus früheren Abiturprüfungen werden in der Qualifikationsphase regelmäßig in den Unterricht einbezogen, auch zur Entwicklung von Problemlösestrategien.

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung

Grundlage ist das Leistungskonzept der Fachschaft Mathematik (Stand Oktober 2024). In der Sekundarstufe II setzt sich die Zeugnisnote je zur Hälfte aus den „sonstigen Leistungen im Unterricht“ und den schriftlichen Arbeiten zusammen. Die Gewichtung wird dem Kurs zu Beginn des Halbjahres transparent gemacht.

Sonstige Leistungen im Unterricht

Der Bewertungsbereich erfasst die Qualität und Kontinuität der Beiträge, die die Schülerinnen und Schüler in mündlicher und schriftlicher Form in den Unterricht einbringen. In der Sekundarstufe II werden ausschließlich Beiträge berücksichtigt, die aus eigenem Antrieb erbracht werden. Die Dokumentation erfolgt durch die Lehrkraft in regelmäßigen Abständen. Dazu zählen insbesondere:

- Beiträge zum Unterrichtsgespräch (Lösungsvorschläge, Aufzeigen von Zusammenhängen und Widersprüchen, Plausibilitätsbetrachtungen, Bewerten von Ergebnissen, angemessene Verwendung der Fachsprache),
- Leistungen in kooperativen Arbeitsformen (Anstrengungsbereitschaft, Teamfähigkeit, Zuverlässigkeit, Kommunikationsfähigkeit, Präsentation von Arbeitsergebnissen),
- im Unterricht eingeforderte Leistungsnachweise (z.B. vorgetragene Hausaufgaben, Protokolle, Heftführung, Verfügbarkeit von Grundwissen, fehlerfreies Anwenden geübter Fertigkeiten),
- Aufgaben aus Studienzeiten,
- Präsentationen und Referate,
- der sachgerechte Umgang mit digitalen Werkzeugen (TI-Nspire™ CAS-App, GeoGebra, Tabellenkalkulation).

Kurze schriftliche Überprüfungen sind möglich, werden in Mathematik aber nur selten eingesetzt.

Klausuren

Klausuren dienen der schriftlichen Überprüfung der im Unterricht erworbenen Kompetenzen. Die Aufgaben beschränken sich nicht auf Reproduktion, sondern verlangen zunehmend Begründungen, Darstellungen von Zusammenhängen, Interpretationen und kritische Reflexionen; auch offene Aufgaben ohne eindeutig vorgegebenen Lösungsweg werden einbezogen. Im Verlauf der Oberstufe werden die Aufgaben umfangreicher und komplexer und nähern sich den Anforderungen der Abiturprüfung an: Das Schwergewicht liegt im Anforderungsbereich II; Anforderungsbereich I wird in deutlich höherem Maße berücksichtigt als Anforderungsbereich III. Die Aufgabenstellungen verwenden die Operatoren der Abiturprüfung. Alle Klausuren enthalten einen hilfsmittelfreien Teil; im Teil mit Hilfsmitteln sind die TI-Nspire™ CAS-App und das „Dokument mit mathematischen Formeln“ zugelassen.

Halbjahr	Anzahl und Dauer der Klausuren
EF.1	2 Klausuren, je 90 Minuten
EF.2	2 Klausuren, je 90 Minuten; am Ende der Einführungsphase Zentrale Klausur nach den landesweiten Vorgaben
Q1.1	2 Klausuren; Grundkurs je 90 Minuten, Leistungskurs je 135 Minuten
Q1.2	2 Klausuren; Grundkurs je 135 Minuten, Leistungskurs je 180 Minuten
Q2.1	2 Klausuren; Grundkurs je 180 Minuten, Leistungskurs je 225 Minuten
Q2.2	1 Klausur nach den Vorgaben für das Abitur (Vorabitur)

Bewertungskriterien sind die mathematische Richtigkeit, die formale Richtigkeit (z.B. Gleichungen, Äquivalenzumformungen, Integrale, Einheiten), eine fachlich angemessene Darstellung in Sprache und Zeichnung sowie nachvollziehbare Lösungswege mit Erläuterungen. Die folgenden Prozentangaben der Rohpunkte geben an, ab wann eine Note in etwa erreicht ist; da Noten pädagogische und nicht rein mathematische Bewertungsinstrumente sind, handelt es sich um eine ungefähre Zuordnung.

Einführungsphase: Note	ab ca.
sehr gut	87 %
gut	73 %
befriedigend	59 %
ausreichend	45 %
mangelhaft	23 %
ungenügend	0 %

Qualifikationsphase: Notenpunkte	ab ca.
15 / 14 / 13 Punkte (sehr gut)	95 / 90 / 85 %
12 / 11 / 10 Punkte (gut)	80 / 75 / 70 %
9 / 8 / 7 Punkte (befriedigend)	65 / 60 / 55 %
6 / 5 / 4 Punkte (ausreichend)	50 / 45 / 40 %
3 / 2 / 1 Punkte (mangelhaft)	33 / 27 / 20 %
0 Punkte (ungenügend)	unter 20 %

Bei nicht ausreichenden Leistungen in Klausuren erhalten die Schülerinnen und Schüler Hinweise zur Förderung, in denen die Förderschwerpunkte (z.B. bestimmte Aufgabentypen) verständlich hervorgehoben werden. Die Form der Hinweise wählt die Lehrkraft.

Facharbeit

In der Q1 kann eine Klausur im 2. oder 3. Quartal durch eine Facharbeit ersetzt werden; die Zuteilung erfolgt durch die Oberstufenkoordination. Die Bearbeitungszeit beträgt zehn Wochen, der Umfang 10 bis 12 Seiten Text. Das Thema wird mit der betreuenden Lehrkraft abgesprochen und an das Halbjahresthema angebunden. Nach etwa vier Wochen werden eine vorläufige Gliederung, eine exemplarische Textseite und ein vorläufiges Literaturverzeichnis abgegeben; sie gehen in die Bewertung ein. Der Einsatz von KI ist vollständig zu dokumentieren. Nach der Abgabe stellen die Schülerinnen und Schüler (Teil-)Themen ihrer Arbeit mündlich vor. Bewertet werden der Arbeitsprozess (Selbstständigkeit, Selbstorganisation, Dokumentation, Planung und Zeitmanagement, Austausch mit der Lehrkraft), das Produkt (Inhalt, Darstellungsleistung, Fachsprache, formale Vorgaben) und die mündliche Vorstellung. Die formalen Vorgaben stellt die Stufenleitung bereit, die fachspezifischen Vorgaben die betreuende Lehrkraft.

2.4 Lehr- und Lernmittel

- Lehrwerk: In der Einführungsphase und in der Qualifikationsphase ist das Lehrwerk „Elemente der Mathematik“ eingeführt.
- Geräte: Alle Schülerinnen und Schüler arbeiten mit ihrem eigenen, in das Schulsystem eingebundenen iPad.
- Modulares Mathematiksystem: In der gesamten Oberstufe wird die TI-Nspire™ CAS-App verwendet; sie ist auch in Klausuren, in der Zentralen Klausur und im Abitur das zugelassene digitale Hilfsmittel.
- Weitere digitale Werkzeuge: GeoGebra Classic (dynamische Geometriesoftware) und Numbers (Tabellenkalkulation).
- Formeln: Ab der Einführungsphase wird das „Dokument mit mathematischen Formeln“ aus den Vorgaben für die Zentrale Klausur und das Abitur verwendet.
- Materialien: Aufgaben früherer Zentraler Klausuren und Abiturprüfungen (Standardsicherung NRW), Aufgaben aus dem Aufgabenpool des IQB, Materialien des Lehrplannavigators sowie die zentral digital bereitgestellten Materialien der Fachgruppe; zur Abiturvorbereitung wird auch SchulLV genutzt.

3 Prüfung und Weiterentwicklung des schulinternen Lehrplans

Der schulinterne Lehrplan wird als dynamisches Dokument verstanden. Die Fachkonferenz bespricht jährlich die Abfolge der Unterrichtsvorhaben und passt sie bei Bedarf an; Erfahrungen der unterrichtenden Lehrkräfte fließen dabei ein.

- Zu Beginn des Schuljahres finden Übergabegespräche zwischen abgebenden und übernehmenden Lehrkräften statt, damit der Unterricht inhaltlich sinnvoll weitergeführt werden kann. Auch während des Schuljahres tauschen sich die Kolleginnen und Kollegen über den Fortgang des Unterrichts aus; bei parallel unterrichteten Kursen bieten sich gemeinsam gestellte Klausuren an.
- Die Ergebnisse der Zentralen Klausur am Ende der Einführungsphase und der Abiturprüfung sowie die fachdidaktischen Rückmeldungen des Landes werden in der Fachkonferenz ausgewertet und für die Weiterentwicklung des Unterrichts genutzt.
- Erkenntnisse und Materialien aus Fortbildungen werden der Fachgruppe vorgestellt und zentral digital bereitgestellt; erkannter Fortbildungsbedarf wird der Fortbildungskoordination gemeldet.
- Schülerinnen und Schüler erhalten die Möglichkeit, Rückmeldung zum Unterricht zu geben; diese wird als weitere Quelle für die Evaluation genutzt.
- Da die TI-Nspire™ CAS-App ab dem Schuljahr 2026/27 bereits ab Klasse 7 eingesetzt wird, prüft die Fachkonferenz, wie sich die Einführung des MMS in der Einführungsphase für die betreffenden Jahrgänge verändert.